

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIX**, 11.

---

ÜBER DEN EINFLUSS DES  
AKKOMMODATIONSKOEFFIZIENTEN  
AUF DIE WÄRMELEITUNG UND  
RADIOMETERKRAFT IN GASEN

VON

SOPHUS WEBER



KØBENHAVN

I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD

1942

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

1. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> wurde nachgewiesen, daß der Wärmetransport in Gasen im MAXWELL'schen Zustande auch aufgrund der einfachen kinetischen Theorie richtig berechnet werden kann, wenn angenommen wird, dass die Moleküle, welche von dem mittleren Abstand  $\lambda$  kommen, wo  $\lambda$  die mittlere freie Weglänge ist, nicht die Temperatur des Gases im Abstände  $\lambda$ , sondern die Temperatur des Gases im mittleren Abstand  $\frac{1}{2}k\lambda$  besitzen; bei der praktischen Durchführung der Berechnungen kann also angenommen werden, dass die Moleküle nicht von dem Abstand  $\lambda$ , sondern von dem Abstand  $\frac{1}{2}k\lambda$  kommen.

Für die Wärmeleitfähigkeit des Gases im MAXWELL'schen Zustande wurde hiernach abgeleitet:

$$K = k \cdot \varepsilon \cdot p \lambda, \quad (1)$$

Für einatomige Gase ist  $k = \frac{15}{4}$ , und für mehratomige Gase:

$$k = \frac{9\gamma - 5}{\gamma + 1}, \quad \text{wo } \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

$p$  ist der Druck des Gases und  $\varepsilon$  die von MARTIN KNUDSEN eingeführte molekulare Wärmeleitfähigkeit; wenn der Zustand des Gases sich ändert und vom MAXWELL'schen

<sup>1)</sup> SOPHUS WEBER: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. XVI, 9, 1939, S. 14.

in den molekularen KNUDSEN-Zustand übergeht, wird  $k$  sich wahrscheinlich ändern von  $k = \frac{15}{4}$  in  $k = 2$ , in Übereinstimmung damit, dass das Verhältnis  $f = \frac{K}{c_v \cdot \eta}$  sich von  $f = \frac{5}{2}$  in  $f = \frac{4}{3}$  ändert.

2. Wir wollen zunächst die Wärmeleitung zwischen zwei unendlich grossen, parallelen Platten  $A$  und  $B$  (vgl. Fig. 1) im Abstand  $d$  und mit den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  bzw. den Akkommodationskoeffizienten  $a_1$  und  $a_0$  betrach-

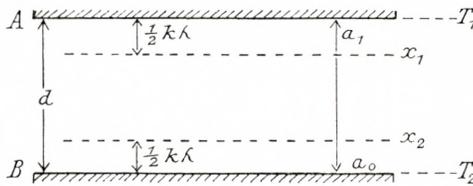


Fig. 1.

ten. Wir erhalten dann für den Wärmetransport per  $\text{cm}^2$ ,  $q$ , wenn die Temperaturen des Gases im Abstand  $\frac{1}{2} k \lambda$  von den Platten mit  $X_1$  und  $X_2$  bezeichnet werden:

$$q = a_1 \cdot p (T_1 - X_1) \varepsilon_{x_1} = a_0 \cdot p (X_2 - T_2) \varepsilon_{x_2} = \frac{K(X_1 - X_2)}{d - 2 \cdot \frac{1}{2} k \lambda}.$$

Bei kleinen Temperaturdifferenzen können  $\varepsilon_{x_1}$ ,  $\varepsilon_{x_2}$  und  $K$  bei der Temperatur  $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$  befindlich angenommen werden.

Mit  $K = k \varepsilon p \lambda$  und nach Elimination von  $X_1$  und  $X_2$  erhalten wir hieraus:

$$q = \frac{K(T_1 - T_2)}{d \left[ 1 + \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \right) \frac{k \lambda}{d} \right]} = \frac{K(T_1 - T_2)}{d + \left( \frac{2 - a_1}{2 a_1} + \frac{2 - a_0}{2 a_0} \right) k \lambda}.$$

Diese Formel für die Wärmeleitung zwischen zwei unendlich grossen, parallelen Platten kann, wenn wir setzen:

$$q_p = \frac{q}{T_1 - T_2}, \quad q_0 = \frac{a_1 a_0}{a_1 + a_0 - a_1 a_0} \cdot \varepsilon p \quad \text{und} \quad q_\infty = \frac{K}{d},$$

auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\infty}$$

oder, weil  $K = k \varepsilon p \lambda$ :

$$q_p = \frac{q}{T_1 - T_2} = \frac{a_1 a_0}{a_1 + a_0 - a_1 a_0} \cdot \varepsilon p \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{a_1 a_0}{a_1 + a_0 - a_1 a_0} \cdot \frac{d}{\lambda}}$$

Im KNUDSEN-Zustand, d. h.  $\frac{d}{\lambda} = 0$ , wird  $k = 2$  und also:

$$\lim_{\frac{d}{\lambda} \rightarrow 0} q_p = \frac{q}{T_1 - T_2} = \frac{a_1 a_0}{a_1 + a_0 - a_1 a_0} \cdot \varepsilon p \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{a_1 a_0}{a_1 + a_0 - a_1 a_0} \cdot \frac{d}{\lambda}} \quad (2)$$

Die obenstehende Formel (2) kann man auch auf direkte Weise ableiten, wenn man von dem rein molekularen Zustand, d. h.  $\frac{d}{\lambda} = 0$ , ausgeht und den Einfluss vereinzelter Zusammenstösse berechnet.

Da das Beobachtungsmaterial zur Nachprüfung der Formel (2) leider fehlt, werde ich hierauf nicht näher eingehen.

3. Betrachten wir die Wärmeleitung zwischen zwei coaxialen Zylindern mit den Radien  $r_0$  und  $r_1$  ( $r_0 > r_1$ ) (die SCHLEIERMACHER'sche Methode)<sup>2)</sup>, finden wir in Analogie zu den parallelen Platten für einatomige Gase (Fig. 2):

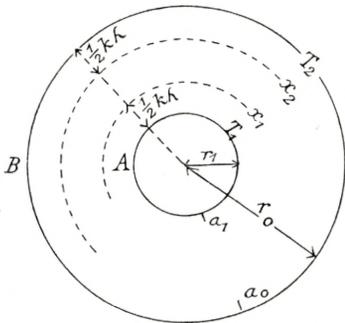


Fig. 2.

<sup>2)</sup> A. SCHLEIERMACHER: W. A., 34, 1888, S. 623.

$$\begin{aligned}
 q' &= 2\pi r_1 a_1 \varepsilon p (T_1 - X_1) = 2\pi r_0 a_0 \varepsilon p (X_2 - T_2) = \\
 &= 2\pi K \frac{X_1 - X_2}{\ln \frac{r_0 - \frac{1}{2}k\lambda}{r_1 + \frac{1}{2}k\lambda}}.
 \end{aligned}$$

Nach Elimination von  $X_1$  und  $X_2$  erhält man:

$$q' = 2\pi K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_0 - \frac{1}{2}k\lambda}{r_1 + \frac{1}{2}k\lambda} + \frac{1}{a_1} \cdot \frac{k\lambda}{r_1} + \frac{1}{a_0} \cdot \frac{k\lambda}{r_0}}. \quad (3)$$

Für  $\frac{1}{2}k \frac{\lambda}{r_1} \rightarrow 0$  gewinnen wir hieraus die bekannte SCHLEIERMACHER'sche Formel mit der Korrektur für den Temperatursprung an den beiden Oberflächen:

$$q' = 2\pi K \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_0}{r_1} + k \frac{2 - a_1}{2 a_1} \cdot \frac{\lambda}{r_1} + k \frac{2 - a_0}{2 a_0} \cdot \frac{\lambda}{r_0}}, \quad (3a)$$

die bei den Bestimmungen der Wärmeleitfähigkeit der Gase sehr oft<sup>3)</sup> angewandt wird.

Für  $\frac{1}{2}k \frac{\lambda}{r_0} \rightarrow 0$  kann die Formel (3) auch wie folgt geschrieben werden:

$$q' = 2\pi K \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}{r_1 + \frac{1}{2}k\lambda} + k \frac{\lambda}{r_1} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \frac{r_1}{r_0} \right)}. \quad (4)$$

Diese Formel (4) ist für  $\frac{\lambda}{r_1} \rightarrow 0$  praktisch identisch mit der Formel (3); für  $\frac{r_0}{\lambda} \rightarrow 0$  gibt die Formel (4), weil  $K = k \varepsilon p \lambda$ , den Grenzwert:

<sup>3)</sup> SOPHUS WEBER: Ann. d. Phys. 54, 1917, S. 325.

— — — — 54, 1917, S. 437.

$$q'_0 = \frac{2 \pi k \varepsilon p \lambda (T_1 - T_2)}{k \frac{\lambda}{r_1} \left\{ \frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0} \right\}} = 2 \pi r_1 \varepsilon p \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}}. \quad (5)$$

Dieser Ausdruck für  $q'_0$  ist, wie später durch direkte Ableitung gezeigt wird, der richtige Grenzwert für die Wärmeabgabe zwischen zwei unendlich langen, coaxialen Zylindern, wenn das Gas im KNUDSEN-Zustand ist.

Es ist also zu erwarten, dass die Formel (4) im gesamten Druckgebiet:

$$0 \leq \frac{r_1}{\lambda} \leq \infty$$

mit grosser Annäherung, jedenfalls für einatomige Gase, gilt; wahrscheinlich ist sie auch eine brauchbare Annäherung für mehratomige Gase.

Aus Formel (4) erhalten wir die Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha}, \quad (6)$$

wenn wir

$$q_0 = \frac{q'_0}{2 \pi r_1 (T_1 - T_2)} = \frac{a_1 \varepsilon p}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}}$$

nennen, und

$$q_\alpha = \frac{2 \pi K}{2 \pi r_1 (T_1 - T_2)} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_0 + \frac{1}{2} k \lambda}{r_1 + \frac{1}{2} k \lambda}} = \frac{K}{r_1} \cdot \frac{1}{\ln \frac{r_0 + \frac{1}{2} k \lambda}{r_1 + \frac{1}{2} k \lambda}}$$

$q_p$  ist also die Wärmeabgabe per  $\text{cm}^2$  und Sek. bei einer Temperaturdifferenz von einem Grad und bei einem Gasdruck  $p$ . Aus Formel (6) geht hervor, dass die Temperaturabhängigkeit von  $q_p$  im gesamten Druckgebiet ziemlich kompliziert wird, weil:

$$q_0 \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \text{und} \quad q_c \propto T^{\frac{1}{2}+n},$$

wo  $n$  durch die Temperaturvariation der inneren Reibung,  $\eta$ , des Gases bestimmt ist; wie bekannt, ist diese gegeben durch:

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{T}{273.1} \right)^{\frac{1}{2}+n}.$$

Wir sehen hieraus, dass  $q_p$  bei einem bestimmten Druck von der mittleren Temperatur  $T$  des Gases unabhängig wird, weil die Zunahme von  $\frac{1}{q_0}$  dann durch die Abnahme von  $\frac{1}{q_c}$  kompensiert wird; dies erhellt auch aus den Messreihen von MARTIN KNUDSEN<sup>4)</sup> und R. E. H. RASMUSSEN<sup>5)</sup>.

4. Die Richtigkeit von Formel (5) für  $\frac{r_0}{\lambda}$  bzw.  $\frac{r_1}{\lambda} = 0$  als Grenzwert für den KNUDSEN-Zustand können wir durch direkte Ableitung dieser Formel nachweisen.

Zu diesem Zweck (Fig. 3) betrachten wir die molekulare

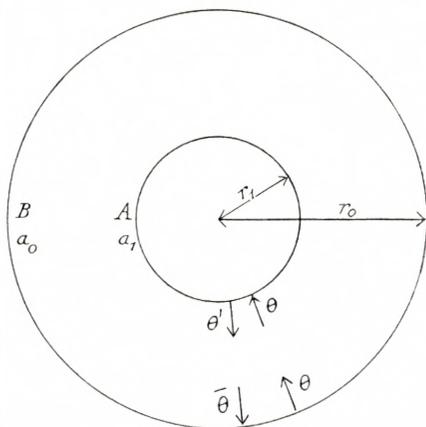


Fig. 3.

Wärmeleitung zwischen zwei coaxialen Zylindern  $A$  und  $B$  mit den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , bzw. den Akkommodationskoeffizienten  $a_1$  und  $a_0$ ; die Radien sind  $r_1$  und  $r_0$ , während die Länge,  $L$ , der Zylinder als unendlich angenommen wird. Wir nennen die mittlere Temperatur der

4) MARTIN KNUDSEN: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. XI, 1, 1930, S. 59.

5) R. E. H. RASMUSSEN: Persönliche Mitteilung.

Moleküle, die von der Oberfläche  $A$  kommen,  $\theta'$ , und die mittlere Temperatur der Moleküle, die von der Oberfläche  $B$  kommen,  $\theta$ ; alle Moleküle, die gegen  $A$  stossen, kommen von  $B$ , und wir haben demnach:

$$\theta' = \theta + a_1(T_1 - \theta). \quad (7)$$

Die Moleküle, welche gegen  $B$  stossen, kommen teilweise von  $A$  und teilweise von anderen Teilen der Oberfläche  $B$ ; wir nennen die mittlere Temperatur der auf  $B$  einfallenden Moleküle  $\bar{\theta}$  und erhalten:

$$\theta = \bar{\theta} + a_0(\bar{\theta} - T_2). \quad (8)$$

Im stationären Zustand muss die Stosszahl per  $\text{cm}^2$ ,  $\nu = \frac{1}{4}N\Omega$ , im Raum überall dieselbe sein; die totale Anzahl von Molekülen, die gegen  $A$  stossen, ist  $2\pi r_1 L\nu$ , und gegen  $B$ ,  $2\pi r_0 L\nu$ , wovon  $2\pi r_1 L\nu$  von  $A$  kommen, während also  $2\pi(r_0 - r_1)L\nu$  von anderen Teilen von  $B$  herrühren; die mittlere Temperatur  $\bar{\theta}$  wird demnach bestimmt durch:

$$2\pi r_0 L \cdot \nu \bar{\theta} = 2\pi r_1 L \cdot \nu \theta' + 2\pi(r_0 - r_1)L \cdot \nu \theta$$

oder:

$$\bar{\theta} = \frac{r_1}{r_0} \cdot \theta' + \left(1 - \frac{r_1}{r_0}\right) \cdot \theta. \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (7), (8), und (9) erhält man durch einfache Umstellung:

$$\theta = T_1 - \frac{1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}} (T_1 - T_2) \quad (10)$$

$$\theta' = T_1 - \frac{1 - a_1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}} (T_1 - T_2), \quad (11)$$

$$\theta' - \theta = \frac{a_1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}} (T_1 - T_2) \quad (12)$$

und

$$\theta = \theta' + \frac{a_0}{a_0 + (1 - a_0) \cdot \frac{r_1}{r_0}} (T_2 - \theta'). \quad (13)$$

Wird der innere Zylinder durch ein flaches Band der Breite  $B$  ersetzt, sehen wir, dass diese Formeln alle gelten, wenn nur  $\frac{r_1}{r_0}$  durch  $\frac{B}{\pi r_0}$  ersetzt wird.

Aus Formel (13) erhellt, dass durch die wiederholten Zurückwerfungen die Oberfläche  $B$  gegenüber den Molekülen, die von  $A$  kommen, so wirkt, als ob der Akkommodationskoeffizient von  $B$ :

$$a = \frac{a_0}{a_0 + (1 - a_0) \cdot \frac{r_1}{r_0}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}}$$

wäre.

Für  $\frac{r_1}{r_0} \rightleftharpoons 0$  wirkt also die Oberfläche  $B$  als eine »absolut schwarze« oder »absolut raue« Oberfläche, d. h. der Akkommodationskoeffizient der Oberfläche ist:  $a = 1$ .

Die Wärmeabgabe von  $A$  per cm Länge wird:

$$q'_0 = 2\pi r_1 \cdot \varepsilon p \cdot (\theta' - \theta)$$

oder:

$$q'_0 = 2\pi r_1 \cdot \varepsilon p \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}}. \quad (14)$$

Für  $a_1 = a_0$  ist diese Formel in Übereinstimmung mit den von MARTIN KNUDSEN und SMOLUCHOWSKI<sup>6)</sup> abgeleiteten Formeln; dasselbe gilt für  $\frac{r_1}{r_0} \rightleftharpoons 0$ .

<sup>6)</sup> J. H. A. TER HEERDT: Dissertation, Utrecht 1923, S. 146.

Für konzentrische Kugelschalen mit den Radien  $r_0$  und  $r_1$  erhält man auf dieselbe Weise:

$$q'_0 = 4\pi r_1^2 \cdot \varepsilon p \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}, \quad (15)$$

eine Formel, die für die bekannte Abkühlungsmethode zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit in Gasen von Bedeutung sein kann.

Die Formeln (14) und (15) sind für alle Gase gültig; nur ist der Wert von  $\varepsilon$ , das molekulare Wärmeleitvermögen der verschiedenen Gase, verschieden.

Betrachten wir ein flaches Band der Breite  $B$  und mit verschiedenen Akkommodationskoeffizienten,  $a_2$  und  $a_1$ , der beiden Seiten des Bandes, erhalten wir annäherungsweise, wenn  $\frac{B}{2r_0} \rightarrow 1$ , für die Wärmeabgabe per  $\text{cm}^2$ , Sek. und per Grad Temperaturdifferenz:

$$q = \frac{q'}{2B(T_1 - T_2)} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \varepsilon p \left\{ \frac{a_2}{1 + a_2 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} + \frac{a_1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} \right\} \cdot \end{aligned} \right\} (16)$$

In dieser Formel ist der Wert von  $\varepsilon$  durch die Temperatur  $T$  an der Stelle, wo der Druck  $p$  gemessen wird, bestimmt. Da die Akkommodationskoeffizienten für Wärmeleitung und Radiometerkraft laut den Untersuchungen von **MARTIN KNUDSEN**<sup>7)</sup> dieselben sind, findet man annäherungsweise, wenn  $\frac{B}{2r_0} \rightarrow 1$ , für die KNUDSEN'sche Radiometerkraft,  $R_1 = \frac{R}{B(T_1 - T_2)}$ , wenn  $\frac{T_1 - T_2}{T}$  eine kleine Grösse ist:

<sup>7)</sup> MARTIN KNUDSEN: loc. cit. (4), S. 8.

$$R_1 = \frac{R}{B(T_1 - T_2)} = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{T} \left\{ \frac{a_2}{1 + a_2 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} - \frac{a_1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} \right\} \end{aligned} \right\} (17)$$

Auch in diesem Falle sind  $p$  und  $T$  korrespondierende Grössen, während  $R$  die Radiometerkraft per cm Länge des Bandes bezeichnet.

Wir werden später im Zusammenhang mit den experimentellen Untersuchungen von R. E. H. RASMUSSEN<sup>8)</sup> auf diese Formeln zurückkommen.

5. Wir können nun die Formeln (3 a) und (6) mit dem vorliegenden Versuchsmaterial für einatomige Gase vergleichen; die Wärmeleitfähigkeit von sehr reinem Neon wurde früher von mir in einem grossen Druckgebiet<sup>9)</sup>, bzw. Gebiet von  $\frac{r_1}{\lambda}$ , untersucht, u. a. mit einem Doppelapparat nach der Methode von GOLDSCHMIDT<sup>10)</sup>. Der Durchmesser des verwendeten Platindrahtes war  $2r_1 = 0,005240$  cm; der innere Durchmesser des umgebenden Glasrohres war  $2r_0 = 1,526$  cm; den gefundenen Wärmeverlust per cm Länge des Drahtes und per Grad Temperaturunterschied, korrigiert für die Ableitung durch die Enden des Drahtes und für die Strahlung, nennen wir  $D_{\text{obs.}}$ ; diese Grösse ist in Tabelle I, Kolonne 4, angegeben. Aufgrund der Untersuchungen von KNUDSEN hat der Akkommodationskoeffizient einer Glasoberfläche und der einer glatten, blanken Platinoberfläche denselben Wert; für Neon wird in diesem Falle, da es sich um glatte Oberflächen handelt,  $a = a_1 = a_2 = 0,653$

<sup>8)</sup> R. E. H. RASMUSSEN: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. XI, 9, 1932; XIII, 9, 1935, S. 16.

<sup>9)</sup> SOPHUS WEBER: Commun. Leiden. Suppl. 42 b, 1918, S. 34.

<sup>10)</sup> R. GOLDSCHMIDT: Phys. Zeitschrift 12, 1911, S. 418.

gesetzt. Da Neon ein einatomiges Gas ist, wird  $k = 15/4 = 3,75$ . Nach den beiden Formeln (3 a) und (6) erhalten wir für  $T_1 - T_2 = 1$ , wenn:

$$D_\infty = \frac{2\pi K}{\ln \frac{r_0}{r_1}},$$

nach Formel (3 a):

$$D'_\infty = D_{\text{obs.}} \left[ 1 + \frac{k\lambda}{\ln \frac{r_0}{r_1}} \cdot \frac{2-a}{2a} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) \right],$$

und nach Formel (6):

$$D''_\infty = D_{\text{obs.}} \left[ \frac{\ln \frac{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}{r_1 + \frac{1}{2}k\lambda}}{\ln \frac{r_0}{r_1}} + \frac{k\lambda}{\ln \frac{r_0}{r_1}} \left( \frac{1}{ar_1} + \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1}{r_0} \right) \right].$$

Nach der richtigen Formel muss also  $D_\infty$  konstant werden. In der folgenden Tabelle sehen wir die Resultate für Neon; die Temperatur des Heizdrahtes war  $9^\circ,20\text{ C}$  und die Temperatur des umgebenden Bades  $0^\circ\text{ C}$ .

Tabelle I.  
Neon bei  $0^\circ\text{ C}$ .

|    | $p$ cm Hg | $\frac{r_1}{\lambda}$ | $\Delta T = T_1 - T_2$ | $10^6 \cdot D_{\text{obs.}}$ | $10^6 \cdot D'_\infty$<br>Form. (3 a) | $10^6 \cdot D''_\infty$<br>Form. (6) |
|----|-----------|-----------------------|------------------------|------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) | 33,791    | 92,5                  | $9^\circ,20\text{ C}$  | 816,2                        | 822,2                                 | 822,3                                |
| 2) | 20,182    | 55,1                  | —                      | 811,8                        | 821,9                                 | 822,1                                |
| 3) | 10,181    | 27,8                  | —                      | 801,8                        | 821,5                                 | 822,0                                |
| 4) | 5,729     | 15,7                  | —                      | 787,2                        | 821,5                                 | 822,6                                |
| 5) | 1,894     | 5,2                   | —                      | 720,6                        | 816,0                                 | 822,9                                |
| 6) | 0,709     | 1,9                   | —                      | 584,0                        | 790,0                                 | 821,0                                |
| 7) | 0,215     | 0,6                   | —                      | 329,2                        | 707,8                                 | 817,0                                |

Es erhellt aus dieser Tabelle, dass Formel (6) einen weit besseren Anschluss gibt als Formel (3 a), die nur für  $\frac{r_1}{\lambda} \rightarrow \infty$  gültig ist; während die Formel (3 a) bei  $\frac{r_1}{\lambda} = 0,6$  eine Abweichung von etwa 15 % gibt, ist die Abweichung für Formel (6) nur etwa 0,5 %; diese letztere Abweichung ist in Übereinstimmung mit der Messgenauigkeit des Druckes  $p$ .

Aus einer anderen Messreihe der gleichen Untersuchung mit demselben Apparat bei einer Badtemperatur von  $99^{\circ},81\text{ C}$  (vgl. loc. cit. (9) S. 35) geht auch hervor, dass Formel (6) mit den Messungen innerhalb der Messgenauigkeit vollständig übereinstimmt.

6. Einen sehr einfachen Fall von Wärmeleitung zwischen coaxialen Zylindern haben wir in dem Hitzdrahtmanometer von MARTIN KNUDSEN<sup>11)</sup>, in welchem der geheizte Draht ein Wollastondraht ist; wir können diesen Fall durch  $\frac{r_1}{r_0} \cong 0$  charakterisieren, und erhalten dann:

$$q = 2\pi r_1 \cdot a_1 \varepsilon p (T_1 - T_2) \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{k} \cdot \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_0 + \frac{1}{2} k\lambda}{r_1 + \frac{1}{2} k\lambda}}, \quad (18)$$

oder für den Fall, dass  $\frac{r_1}{\lambda} \rightarrow 0$  und  $\frac{\lambda}{r_0} \rightarrow 0$ ,

$$q = 2\pi r_1 \cdot a_1 \varepsilon p (T_1 - T_2) \left\{ 1 - \frac{a_1}{k} \cdot \frac{r_1}{\lambda} \ln \frac{r_0}{r_1 + \frac{1}{2} k\lambda} \right\},$$

woraus:

$$\frac{dq}{dp} = 2\pi r_1 \cdot a_1 \varepsilon (T_1 - T_2) \left\{ 1 - 2 \frac{a_1}{k} \cdot \frac{r_1}{\lambda} \left( \ln \frac{r_0}{r_1 + \frac{1}{2} k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

<sup>11)</sup> MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys. 35, 1911, S. 389.

MARTIN KNUDSEN<sup>12)</sup> hat die Wärmeabgabe eines Hitzdrahtmanometers in Wasserstoff mit einem Wollastondraht  $r_1 = 0,000225$  cm und  $r_0 = 0,535$  cm gemessen in dem ganzen Druckgebiet  $0 \leq p \leq 1$  atm.; in der folgenden Tabelle II sieht man die beobachteten und die nach Formel (18) berechneten Werte für das ganze Gebiet, in welchem  $\frac{r_1}{\lambda}$  sich von 0,002 auf 20 ändert.

Tabelle II.

Wasserstoff:  $(p\lambda)_0 = 11,31$ ,  $a_1\varepsilon = 3,80 \cdot 10^{-6}$ ,  $k = 3,34$ .

| $p$ (Bar)             | $\frac{q}{2\pi r_1} \cdot \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot 10^6$ | $\frac{q}{2\pi r_1} \cdot \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{10^6}{p}$ obs. | $\frac{q}{2\pi r_1} \cdot \frac{1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{10^6}{p}$ ber. | $\frac{r_1}{\lambda}$ |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 107,3                 | 407,7                                                     | 3,800                                                                    | 3,799                                                                    | $2,14 \cdot 10^{-3}$  |
| 214,8                 | 815,6                                                     | 3,797                                                                    | 3,797                                                                    | 4,30 —                |
| 322,4                 | 1220,5                                                    | 3,786                                                                    | 3,795                                                                    | 6,40 —                |
| 428,6                 | 1621,3                                                    | 3,783                                                                    | 3,792                                                                    | $8,50 \cdot 10^{-3}$  |
| 534,8                 | 2015,2                                                    | 3,768                                                                    | 3,789                                                                    | $1,06 \cdot 10^{-2}$  |
| 640,0                 | 2413,5                                                    | 3,771                                                                    | 3,786                                                                    | 1,27 —                |
| 744,6                 | 2804,8                                                    | 3,767                                                                    | 3,783                                                                    | 1,48 —                |
| 848,6                 | 3192,3                                                    | 3,762                                                                    | 3,779                                                                    | 1,69 —                |
| 950,9                 | 3576,0                                                    | 3,761                                                                    | 3,775                                                                    | 1,89 —                |
| 1053,0                | 3954,2                                                    | 3,754                                                                    | 3,771                                                                    | 2,10 —                |
| 3200,0                | 11651                                                     | 3,641                                                                    | 3,689                                                                    | 6,36 —                |
| 6355,0                | 22046                                                     | 3,48                                                                     | 3,56                                                                     | $1,26 \cdot 10^{-1}$  |
| 13450,0               | 42117                                                     | 3,13                                                                     | 3,26                                                                     | 2,68 —                |
| 35000,0               | 83900                                                     | 2,40                                                                     | 2,55                                                                     | $6,97 \cdot 10^{-1}$  |
| 66800,0               | 121900                                                    | 1,83                                                                     | 1,93                                                                     | 1,33                  |
| 129000,0              | 170900                                                    | 1,325                                                                    | 1,290                                                                    | 2,57                  |
| 505000,0              | 211100                                                    | 0,418                                                                    | 0,421                                                                    | 10,2                  |
| 1016000,0<br>(1 atm.) | 223900                                                    | 0,220                                                                    | 0,220                                                                    | 20,2                  |

Eine Abnahme von  $k = 3,34$  wird wohl nur bei den allerniedrigsten Drucken in Frage kommen, wodurch jedoch die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten in diesem Gebiet nur besser werden kann.

12) MARTIN KNUDSEN: ANN. D. PHYS. 34, 1911, S. 636.

Wir sehen hieraus, dass die Übereinstimmung zwischen den berechneten und den observierten Werten befriedigend ist, wenn die Unsicherheit der observierten Werte bei höherem Druck in Betracht gezogen wird; es wäre für die Verwendung des Hitzdrahtmanometers von Interesse, das gesamte Druckgebiet mit verschiedenen Gasen durchzumessen und mit Formel (18) zu vergleichen.

7. MARTIN KNUDSEN<sup>13)</sup> hat in seiner bekannten Untersuchung über Radiometerkraft und Akkommodationskoeffizient u. a. auch die Wärmeabgabe von drei Platinbändern gemessen, die in einem Glaszylinder mit einem Durchmesser von  $2r_0 = 6,40$  cm vertikal ausgespannt waren. Band I war auf beiden Seiten blank, Band II auf beiden Seiten schwarz, während das dritte Band auf einer Seite blank und auf der anderen Seite schwarz war. Band III war in der Mittelachse ausgespannt, während Band I und II etwas exzentrisch und gegenüber Band III symmetrisch montiert waren; die Abmessungen der drei Bänder waren:

|                            | Länge    | Breite    | Dicke          |
|----------------------------|----------|-----------|----------------|
| Band III blank/schwarz . . | 15,31 cm | 0,2484 cm | ca. 0,00026 cm |
| — II schwarz/schwarz       | 15,20    | - 0,2444  | - -            |
| — I blank/blank . . . .    | 15,40    | - 0,2495  | - -            |

Für diese drei Bänder hat MARTIN KNUDSEN in einem grossen Druckgebiet bei verschiedenen Temperaturdifferenzen ( $T_1 - T_2$ ) die Wärmeabgabe in Wasserstoff und Helium gemessen;  $T_2$  war ca.  $20^\circ$  C. Wir schreiben nach KNUDSEN die Wärmeabgabe per  $\text{cm}^2$ , per Grad Temperaturdifferenz und per Sek.:

<sup>13)</sup> MARTIN KNUDSEN: loc. cit. (4), S. 59.

$$Q' = \frac{1}{100} \cdot \frac{q'}{T_1 - T_2} \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad für Band I}$$

$$Q'' = \frac{1}{100} \cdot \frac{q''}{T_1 - T_2} \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad für Band II}$$

$$Q''' = \frac{1}{100} \cdot \frac{q'''}{T_1 - T_2} \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad } \left\{ \begin{array}{l} \text{für beide Seiten von} \\ \text{Band III} \end{array} \right.$$

$q'$ ,  $q''$  und  $q'''$  sind die gemessenen Wärmeabgaben per  $\text{cm}^2$  und Sek.;  $T_1 - T_2$  ist die gemessene Temperaturdifferenz.

Aus den Messungen geht hervor, dass bei den niedrigsten Drucken  $Q''' = Q' + Q''$ , wie auch zu erwarten war, da bei den niedrigsten Drucken die Wärmeabgabe nicht davon beeinflusst wird, dass die Bänder I und II ausserhalb der Achse des Glaszylinders stehen; bei höheren Drucken ist  $Q' + Q''$  grösser als  $Q'''$ .

Wir können in diesem Falle  $Q' + Q'' = (1 + \sigma) Q'''$  setzen, wo  $(1 + \sigma)$  einen Formfaktor darstellt, der davon herrührt, dass Band I und II ausserhalb der Achse stehen; man findet bei den höchsten Drucken im Mittel für Wasserstoff und Helium  $1 + \sigma = 1 + 0,090$ .

Wie auch aus der Radiometerkraftmessung hervorgeht, muss durch die verschiedene Oberflächenbeschaffenheit der beiden Seiten des Bandes III um das Band herum eine horizontale Gasströmung entstehen; aus dem experimentellen Material geht aber hervor, dass diese Strömung die Wärmeabgabe des Bandes nur wenig beeinflusst, da die Wärmeabgabe, wie von KNUDSEN angegeben, bei hohem Druck mit der gewöhnlichen Wärmeleitfähigkeit des ruhenden Gases übereinstimmt; andererseits beeinflusst diese Strömung in hohem Masse die Radiometerkraft, die durch diese Strömung um das Band herum teilweise ausgeglichen wird.

Tabelle III.

Wasserstoff:

$$T_1 - T_2 = 75^\circ \text{C}, T_2 = 20^\circ \text{C}, T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 57,5^\circ \text{C}.$$

| $p$ (Bar) | $\log_{10} p$ | $Q''$ | $Q'$  | $Q'' - Q'$ |
|-----------|---------------|-------|-------|------------|
| 30,7      | 1,487         | 75,6  | 33,1  | 42,5       |
| 55,3      | 1,743         | 126,0 | 56,7  | 69,3       |
| 99,7      | 1,999         | 199,6 | 93,0  | 106,6      |
| 179,7     | 2,255         | 299,1 | 152,0 | 147,1      |
| 324,0     | 2,511         | 407,1 | 230,0 | 177,1      |
| 584,0     | 2,766         | 498,5 | 321,5 | 177,0      |
| 1290,0    | 3,111         | 598,0 | 464,0 | 134,0      |
| 3670,0    | 3,565         | 648,0 | 573,0 | 75,0       |
| 7190,0    | 3,857         | 666,0 | 619,0 | 47,0       |
| 14390,0   | 4,158         | 673,6 | 644,0 | 29,0       |
| 3,04      | 0,478         | 9,97  | 4,07  | 5,90       |
| 10,80     | 1,034         | 32,18 | 14,36 | 17,82      |
| 15,93     | 1,202         | 46,60 | 19,43 | 27,17      |
| 20,29     | 1,307         | 58,94 | 25,06 | 33,90      |

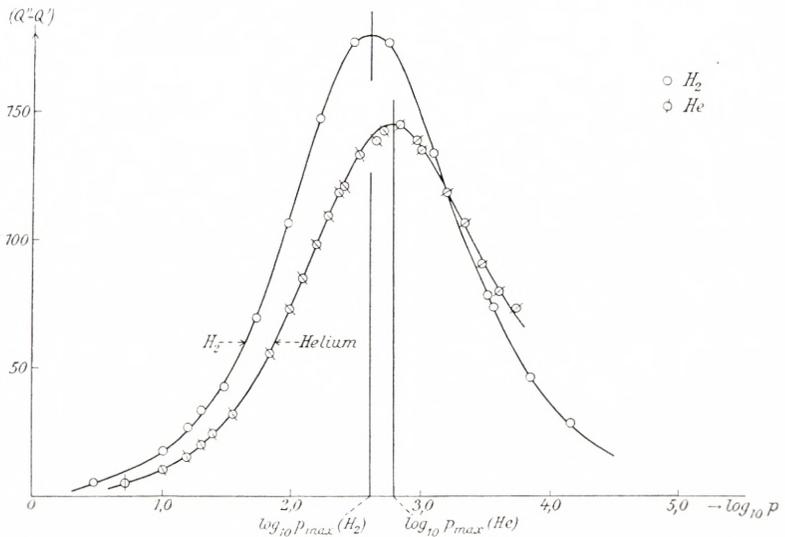


Fig. 4.

Tabelle IV.

Helium:

$$T_1 - T_2 = 82^\circ \text{ C}, T_2 = 20^\circ \text{ C}, T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 61^\circ,0 \text{ C}.$$

| $p$ (Bar) | $\log_{10} p$ | $Q''$ | $Q'$  | $Q'' - Q'$ |
|-----------|---------------|-------|-------|------------|
| 5,205     | 0,717         | 9,72  | 4,36  | 5,36       |
| 10,34     | 1,014         | 18,74 | 8,20  | 10,54      |
| 15,40     | 1,188         | 27,37 | 11,94 | 15,43      |
| 20,30     | 1,308         | 35,55 | 15,49 | 20,06      |
| 25,10     | 1,400         | 43,10 | 18,70 | 24,40      |
| 35,7      | 1,553         | 57,3  | 25,1  | 32,2       |
| 68,9      | 1,838         | 102,7 | 46,5  | 56,2       |
| 99,7      | 1,999         | 139,0 | 65,5  | 73,5       |
| 128,2     | 2,108         | 166,6 | 81,4  | 85,2       |
| 163,5     | 2,214         | 198,2 | 100,0 | 98,2       |
| 204,1     | 2,310         | 228,4 | 119,4 | 109,0      |
| 271,0     | 2,433         | 268,8 | 148,0 | 120,8      |
| 245,0     | 2,389         | 257,0 | 138,7 | 118,3      |
| 357,0     | 2,553         | 315,5 | 182,0 | 133,5      |
| 463,0     | 2,666         | 356,3 | 217,0 | 139,3      |
| 530,0     | 2,724         | 374,0 | 231,4 | 142,6      |
| 712,0     | 2,853         | 420,0 | 274,7 | 145,3      |
| 956,0     | 2,981         | 457,4 | 317,8 | 139,6      |
| 1283      | 3,108         | 495,8 | 360,7 | 135,1      |
| 1711      | 3,233         | 526,4 | 406,8 | 119,6      |
| 2283      | 3,359         | 552,0 | 445,0 | 107,0      |
| 3064      | 3,486         | 571,0 | 480,0 | 91,0       |
| 4113      | 3,614         | 586,4 | 506,0 | 80,4       |
| 5521      | 3,742         | 602,0 | 528,0 | 74,0       |

In den obenstehenden Tabellen III und IV sind die mittleren beobachteten Werte von  $Q''$  und  $Q'$  in Wasserstoff und Helium angegeben; die Mittelwerte von Wasserstoff stimmen mit den Temperaturen  $T_1 = 95^\circ \text{ C}$  und  $T_2 = 20^\circ \text{ C}$  überein; für Helium ist  $T_1 = 102^\circ \text{ C}$  und  $T_2 = 20^\circ \text{ C}$ .

Fig. 4 ist eine graphische Darstellung der Abhängigkeit ( $Q'' - Q'$ ) und  $\log_{10} p$  für Wasserstoff und Helium; es zeigt

sich, dass man eine symmetrische Kurve erhält; das Maximum von  $(Q'' - Q')$  liegt für Wasserstoff bei  $\log_{10} p_{\max} = 2,625$  und für Helium bei  $\log_{10} p_{\max} = 2,790$ . Wir erhalten hiernach:

für Wasserstoff:

$$p_{\max} = 420 \text{ Bar}$$

$$\text{und } \left( \frac{q'' - q'}{T_1 - T_2} \right)_{\max} = 180 \cdot 10^2 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad,}$$

für Helium:

$$p_{\max} = 615 \text{ Bar}$$

$$\text{und } \left( \frac{q'' - q'}{T_1 - T_2} \right)_{\max} = 145 \cdot 10^2 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad.}$$

Wir können nunmehr den Verlauf der Kurven und die Maximumwerte für  $p$  und  $\frac{q'' - q'}{T_1 - T_2}$  nach der Theorie bzw. Formel (6) berechnen. Wir haben, wenn wir  $10^2 \cdot Q'' = {}_2q_p$  und  $10^2 \cdot Q' = {}_1q_p$  nennen:

$$\frac{1}{{}_1q_p} = \frac{1}{{}_1q_0} + \frac{1}{{}_1q_\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{1}{{}_2q_p} = \frac{1}{{}_2q_0} + \frac{1}{{}_2q_\alpha}.$$

Da Band II und Band I symmetrisch zur Achse stehen, ist  ${}_1q_\alpha = {}_2q_\alpha$ , wenn der Druck  $p$  derselbe ist. In diesen Formeln können wir, weil  $\frac{r_1}{r_0}$  klein gegenüber 1 ist, setzen:

$${}_1q_0 = a_1 \varepsilon p \quad \text{und} \quad {}_2q_0 = a_2 \varepsilon p,$$

während:

$${}_1q_\alpha = {}_2q_\alpha = \frac{2\pi K}{2\pi r_1} \cdot \frac{1}{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda} \cdot \ln \frac{r_1 + \frac{1}{2}k\lambda}{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}.$$

Hier ist  $\pi r_1 = b$ , wo  $b$  die Breite des Bandes und  $K$  die Wärmeleitfähigkeit des Gases ist; nach dem vorhergehenden ist  $K = k \varepsilon p \lambda$ .

Wir erhalten hieraus:

$${}_2q_p - {}_1q_p = \frac{{}_2q_0 - {}_1q_0}{1 + \frac{{}_2q_0 + {}_1q_0}{q_\alpha} + \frac{{}_2q_0 \cdot {}_1q_0}{q_\alpha^2}} \quad (19)$$

oder:

$${}_2q_p - {}_1q_p = \frac{(a_2 - a_1) \varepsilon p}{1 + (a_2 + a_1) \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) \cdot p + a_1 a_2 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 \cdot p^2}$$

oder:

$${}_2q_p - {}_1q_p = \frac{(a_2 - a_1) q_\alpha}{\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) \cdot p} + (a_2 + a_1) + a_1 a_2 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) \cdot p}. \quad (20)$$

Hieraus folgt:

$$P_{\max} = \frac{q_\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \quad (21)$$

und:

$$({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max} = \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1})^2} \cdot q_\alpha, \quad (22)$$

woraus:

$$f' = \frac{({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max}}{P_{\max}} = \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1})^2} \sqrt{a_1 a_2} \cdot \varepsilon. \quad (23)$$

Verwenden wir  $P_{\max}$  und  $({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max}$  als Einheiten für  $p$  und  $({}_2q_p - {}_1q_p)$ , erhalten wir:

$$P = \frac{{}_2q_p - {}_1q_p}{({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max}} = \frac{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1})^2}{\sqrt{a_1 a_2}} \cdot \frac{1}{\frac{P}{P_{\max}} + \frac{P_{\max}}{P} + \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{a_1 a_2}}}.$$

Setzen wir  $x = \ln \frac{P}{P_{\max}}$  und  $\delta = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{a_1 a_2}}$ , finden wir:

$$P = \frac{{}_2q_p - {}_1q_p}{({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max}} = \frac{2 + \delta}{e^x + e^{-x} + \delta},$$

woraus erhellt, dass  $P$  in bezug auf sein Maximum bei  $x = 0$  symmetrisch ist, da der Wert für  $x = m$  und

$x = -m$  derselbe wird; dies ist in Übereinstimmung mit den experimentellen Kurven.

Wir können hiernach die theoretischen Werte von  $p_{\max}$  und  $({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max}$  mit den beobachteten Werten vergleichen.

A. Wasserstoff:

$$p_{\max, \text{obs.}} = 420 \text{ Bar};$$

$$({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max, \text{obs.}} = 18000 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad}$$

und also

$$f'_{\text{obs.}} = \frac{18000}{420} = 42,85.$$

Aufgrund der KNUDSEN'schen Werte:

$$a_2 = 0,735 \quad \text{und} \quad a_1 = 0,315$$

und

$$\epsilon_T = \frac{7555}{\sqrt{273 + T}} = 415,5$$

erhalten wir:

$$f'_{\text{theor.}} = \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1})^2} \sqrt{a_1 a_2} \cdot \epsilon_T = 41,75,$$

also eine befriedigende Übereinstimmung.

Für

$$q'_\alpha = \frac{\pi \cdot K_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0,70}}{r_0 + \frac{1}{2} k \lambda_{\max}} \cdot \frac{b \ln}{\frac{b}{\pi} + \frac{1}{2} k \lambda_{\max}}$$

finden wir den Wert:

$$q'_\alpha = 81140, \text{ da } K_0 = 4170 \cdot 10^{-7} \cdot 4,19 \cdot 10^7,$$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{T_1 + T_2}{2 T_0} = 1,210, \quad \frac{1}{2} k \lambda_{\max} = 0,064, \quad (p\lambda)_T = 14,22$$

und  $b = 0,2470 \text{ cm}$ . Wo aber Band I und II nicht in der Achse stehen, wird  $q_\alpha = q'_\alpha (1 + \sigma) = 81140 \cdot 1,090 = 88440$ .

Hieraus bekommt man:

$$p_{\max, \text{ber.}} = \frac{q_\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{88440}{415,5} \cdot \frac{1}{0,481} = 442 \text{ Bar}$$

und

$$\begin{aligned} ({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max, \text{ber.}} &= \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1})^2} \cdot q_\alpha = \frac{0,42}{2,012} \cdot 88440 \\ &= 18460 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad.} \end{aligned}$$

Die Übereinstimmung ist, wenn die Genauigkeit der Bestimmungen in Betracht gezogen wird, ziemlich befriedigend.

B. Helium:

Für Helium wurde experimentell gefunden:

$$\begin{aligned} p_{\max, \text{obs.}} &= 615 \text{ Bar.} \quad \text{und} \quad ({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max, \text{obs.}} \\ &= 14500 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad,} \end{aligned}$$

woraus:

$$f'_{\text{obs.}} = \frac{14500}{615} = 23,57.$$

Aufgrund der KNUDSEN'schen Werte:

$$a_2 = 0,909, \quad a_1 = 0,411 \quad \text{und} \quad \varepsilon_T = \frac{3637,5}{\sqrt{273 + T}} = 199,1$$

erhalten wir:

$$f'_{\text{theor.}} = \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2} \sqrt{a_2 a_1} \cdot \varepsilon_T = 23,83.$$

Für Helium wird:

$$q'_\alpha = \frac{\pi \cdot K_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0,65}}{b \ln \frac{r_0 + \frac{1}{2} k \lambda_{\max}}{\frac{b}{\pi} + \frac{1}{2} k \lambda_{\max}}} = 67160,$$

$$\begin{aligned} \text{da } K_0 &= 3430 \cdot 10^{-7} \cdot 4,19 \cdot 10^7, \quad \frac{T}{T_0} = \frac{T_1 + T_2}{2 T_0} = 1,223, \quad \frac{1}{2} k \lambda_{\max} \\ &= 0,0683, \quad (p \lambda)_T = 22,36, \quad b = 0,2470 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man:

$$q_{\alpha} = (1 + \sigma) q'_{\alpha} = 1,090 \cdot 67160 = 73200,$$

woraus:

$$P_{\max, \text{ber.}} = \frac{q_{\alpha}}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} = \frac{73200}{199,1} \cdot \frac{1}{0,611} = 601 \text{ Bar}$$

und

$$\begin{aligned} ({}_2q_p - {}_1q_p)_{\max} &= \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2} \cdot q_{\alpha} = \frac{0,498}{2,543} \cdot 73200 \\ &= 14300 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad.} \end{aligned}$$

Auch für Helium ist die Übereinstimmung zwischen den observierten und den theoretischen Werten nicht unbefriedigend. Es kann hiernach angenommen werden, dass die theoretische Formel (20) als erste Annäherung für das ganze Gebiet  $0 \leq \frac{b}{\lambda} \leq \infty$  gelten darf; für einen vollständigen Vergleich über das ganze Gebiet ist das experimentelle Material nicht voll ausreichend.

8. Die Richtigkeit der Formel (14):

$$q_0 = 2\pi r_1 \cdot \varepsilon p \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}},$$

ist für verschiedene Werte von  $\frac{r_1}{r_0}$ ,  $a_0$  und  $a_1$  noch nicht hinreichend experimentell untersucht; nach den KNUDSEN'schen Untersuchungen darf aber die Formel, jedenfalls für  $a_0 = a_1$  und für  $\frac{r_1}{r_0} \rightarrow 0$  als richtig angenommen werden; für  $\frac{r_1}{r_0} \rightarrow 1$  erhält man den Grenzwert der Formel (2) für  $\frac{d}{\lambda} = 0$ ; in diesem Falle wird  $r_0 - r_1 = d$ .

R. E. H. RASMUSSEN<sup>14)</sup> hat eine Reihe experimenteller Unter-

<sup>14)</sup> R. E. H. RASMUSSEN: D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Math.-fys. Medd. XIII, 9, 1935, S. 16.

suchungen über die KNUDSEN'sche Radiometerkraft durchgeführt, welche auf verschiedenen Werten des Akkommodationskoeffizienten der beiden Seiten des Radiometersystems beruht; gleichzeitig mit der Radiometerkraft hat RASMUSSEN auch die Wärmeabgabe des verwendeten Platinbandes gemessen<sup>15)</sup>; das Radiometersystem bestand aus einem vertikalen Platinband, ca. 1 cm breit, dessen eine Seite mit Platinschwarz rauh gemacht war; das Band war in der Mitte eines vertikalen Messingrohres mit rechtwinkligem Querschnitt ausgespannt (Fig. 5); die inneren Abmessungen des Messingrohres waren  $ab = l = 3,2$  cm und  $ac = m = 1,48$  cm; die Temperatur  $T_1$  des geheizten Platinbandes wurde durch den elektrischen Widerstand  $W$  bestimmt, und die Temperatur  $T_2$  des Messingrohres wurde mit einem Quecksilberthermometer gemessen, dessen Behälter mit WOOD-Metall in leitende Verbindung mit dem Messingrohr gebracht war; das ganze Messsystem war in einem weiten Glasbehälter angebracht. MARTIN KNUDSEN fand bei seinen Messungen in einem sehr grossen Behälter für die blanke Seite eines ähnlichen Bandes in Wasserstoff:  $\alpha_1 = 0,315$ ; leider wurde bei den Versuchen von RASMUSSEN der Akkommodationskoeffizient  $\alpha_2$  für die raue Seite allein nicht gesondert in einem grossen Behälter gemessen; da das Messingrohr aus glattem Metall besteht, darf man annehmen, dass für Wasserstoff  $\alpha_0 = 0,315$  gesetzt werden kann.

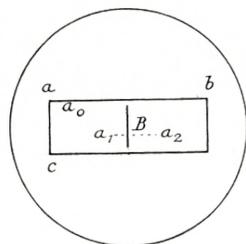


Fig. 5.

Die Abmessungen und Konstanten des Systems waren:

<sup>15)</sup> Diese Messungen sind bisher nicht veröffentlicht, doch hat Dr. RASMUSSEN sie mir in lebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm auch hier meinen besten Dank aussprechen möchte.

|                                                                                                       |                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Breite des Platinbandes . . . . .                                                                     | $B = 0,999$ cm                                                                                  |
| Länge - — . . . . .                                                                                   | $L = 14,83$ cm                                                                                  |
| Dicke - — . . . . .                                                                                   | $d = \text{ca. } 0,0003$ cm                                                                     |
| $a_1$ (blanke Seite) — . . . . .                                                                      | $a_1 = 0,315$                                                                                   |
| $a_0$ (Messingrohr) . . . . .                                                                         | $a_0 = 0,315$                                                                                   |
| $a_2$ (schwarze Seite des Platinb.)                                                                   | nicht bekannt                                                                                   |
| Innenmasse des Messingrohres                                                                          | $m = 1,48$ cm                                                                                   |
| — - —                                                                                                 | $l = 3,20$ cm                                                                                   |
| Widerstand des Platinbandes .                                                                         | $W$ in Ohm                                                                                      |
| Heizstrom des Platinbandes . . .                                                                      | $i$ in Amp.                                                                                     |
| Wärmeverlust des Bandes per<br>cm <sup>2</sup> , Sek. und per Grad Tem-<br>peraturdifferenz . . . . . | $q = \frac{W \cdot i^2}{T_1 - T_2} \cdot \frac{10^7}{2BL} \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad}$ |
| Radiometerkraft per cm <sup>2</sup> und<br>Grad . . . . .                                             |                                                                                                 |

In der folgenden Tabelle V sind die Messungen für den totalen Wärmeverlust des geheizten Bandes  $q'$  und die Radiometerkraft  $R_1$  angegeben:

Durch ein rechnerisches oder graphisches Verfahren ist es einfach hieraus die Werte von:

$$\lim \left( \frac{dq'}{dp} \right)_{p=0} \quad \text{und} \quad \lim \left( \frac{dR_1}{dp} \right)_{p=0}$$

zu bestimmen; man erhält:

$$\lim \left( \frac{dq'}{dp} \right)_{p=0} = 167,0 \quad \text{und} \quad \lim \left( \frac{dR_1}{dp} \right)_{p=0} = 2,60 \cdot 10^{-4},$$

da  $2BL = 29,66$  cm<sup>2</sup>.

Mit Hilfe der Formeln (16) und (17) können wir aus den observierten Werten von  $\left( \frac{dq'}{dp} \right)_{p=0}$  und  $\left( \frac{dR_1}{dp} \right)_{p=0}$  den Wert von  $a_2$  bestimmen; aus der Wärmeabgabe finden wir  $a_2 = 0,622$ , während die Radiometerkraft  $a_2 = 0,799$  ergibt, also eine grosse Differenz.

Tabelle V.

Messungen mit Wasserstoff:

$T_2 = 20^\circ \text{C}$ ,  $T_1 - T_2 = \text{ca. } 80^\circ \text{C}$ .

| $p$ (Bar) | $\Delta p$ (Bar) | $q' = \frac{W \cdot i^2}{T_1 - T_2} \cdot \text{Watt/Grad}$ | $10^4 \cdot R_1$<br>Dyn/cm <sup>2</sup> , Grad |
|-----------|------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 0,00      |                  | 0,00000                                                     | 0,0                                            |
| 2,75      | 2,75             | 0,00132                                                     | 8,4                                            |
| 5,48      | 2,73             | 0,00262                                                     | 16,2                                           |
| 8,21      | 2,73             | 0,00387                                                     | 24,6                                           |
| 10,92     | 2,71             | 0,00504                                                     | 29,2                                           |
| 13,62     | 2,70             | 0,00620                                                     | 35,3                                           |
| 16,31     | 2,69             | 0,00732                                                     | 41,1                                           |
| 19,00     | 2,69             | 0,00836                                                     | 46,3                                           |
| 21,70     | 2,70             | 0,00933                                                     | 50,6                                           |
| 0,00      |                  | 0,00000                                                     | 0,0                                            |
| 5,25      | 5,25             | 0,00242                                                     | 11,8                                           |
| 10,49     | 5,24             | 0,00485                                                     | 27,5                                           |
| 15,70     | 5,21             | 0,00726                                                     | 39,4                                           |
| 20,90     | 5,20             | 0,00939                                                     | 48,3                                           |
| 26,1      | 5,20             | 0,01142                                                     | 56,6                                           |
| 31,2      | 5,10             | 0,01337                                                     | 62,9                                           |
| 36,3      | 5,10             | 0,01524                                                     | 71,0                                           |

Verwendet man einfachheitshalber für  $a_2$  den Wert:  $a_2 = 0,735$ , den MARTIN KNUDSEN auch durch direkte Messung für die schwarze Seite des von ihm verwendeten und auf gleiche Weise hergestellten Bandes gefunden hat, dann bekommt man mit  $B = 1$  und  $\pi r_0 = \frac{1}{2}(l + m) = 4,68$  aus der Formel für die Wärmeabgabe:

$$\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=0} = \frac{1}{2} \varepsilon_{T_2} \left\{ \frac{a_2}{1 + a_2 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} + \frac{a_1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} \right\},$$

$\left(\frac{dq}{dp}\right)_{p=0} = 181,5$ , also einen etwa 10 % grösseren Wert als den beobachteten.

Für die Radiometerkraft  $R_1$  hat man:

$$\left(\frac{dR_1}{dp}\right)_{p=0} = \frac{1}{4T_2} \left\{ \frac{a_2}{1+a_2} \frac{1-a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0} - \frac{a_1}{1+a_1} \frac{1-a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0} \right\},$$

woraus man mit denselben Werten von  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$ ,  $B$  und  $\pi r_0$ :

$$\left(\frac{dR_1}{dp}\right)_{p=0} = 2,33 \cdot 10^{-4}$$

bekommt, d. h. einen etwa 10 % kleineren Wert als den beobachteten. Diese Abweichungen liegen innerhalb der Genauigkeit, womit diese schwierigen Messungen ausgeführt werden konnten; wir dürfen also annehmen, dass der Wert  $a_2 = 0,735$  dem richtigen Wert von  $a_2$  nahe kommt.

Es erhellt hieraus, obwohl der Wert von  $a_2$  sehr unsicher ist und die Formeln (16) und (17) bei den RASMUSSEN'schen Versuchsbedingungen nur Annäherungsformeln sind, dass es im KNUDSEN-Zustand des Gases notwendig ist, auch den Wert von  $a_0$  zu berücksichtigen.

9. Um den Zusammenhang zwischen der Wärmeabgabe und der KNUDSEN'schen Radiometerkraft klarzulegen, auch

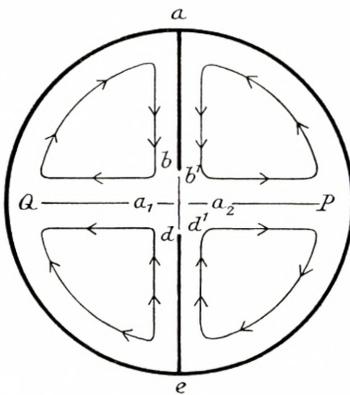


Fig. 6.

dann, wenn der molekulare Zustand nicht mehr besteht, werden wir erst die Aufstellung Fig. 6 betrachten; diese Aufstellung ist im Prinzip dieselbe wie die von RASMUSSEN<sup>16)</sup> verwendete; sie ist jedoch für die Diskussion etwas übersichtlicher und würde ausserdem eine grössere Stabilität der Messungen gewährleisten.

<sup>16)</sup> R. E. H. RASMUSSEN: loc. cit. (14), S. 15.

Das zylindrische Rohr mit dem Radius  $r_0$  und der Temperatur  $T_2$  ist in zwei Teile oder Hälften,  $P$  und  $Q$ , geteilt und zwar durch die festen Zwischenwände  $ab$  und  $de$  und durch das seitwärts bewegliche Radiometerband  $b^1d^1 = B$ , dessen beide Seiten verschiedene Akkommodationskoeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  besitzen; die Abstände  $bb^1$  und  $dd^1$  werden so klein wie praktisch möglich gehalten.

Wird das Platinband  $b^1d^1$  der Breite  $B$  durch einen elektrischen Strom,  $i$  Amp., bis zu dem Widerstand  $W$ , bzw. der Temperatur  $T_1$ , geheizt, entsteht eine stationäre Wärmeströmung von  $B$  nach der Umgebung; gleichzeitig unterliegt das Band  $B$  einer KNUDSEN'schen Radiometerkraft, die in den Versuchen mit Hilfe einer magnetischen Kompensationsmethode<sup>17)</sup> gemessen wird. Der Vorteil dieser Methode ist, dass das Band zwischen den festen Wänden  $ab$  und  $de$  auf seinem Platz bleibt und hierdurch den Strömungszustand nicht beeinflusst. Wird die Breite des Bandes gegenüber dem Umkreis des Raumes  $P$ , bzw.  $Q$ , klein gewählt, wird der Druckunterschied zwischen dem Raum  $P$  und  $Q$  nicht allzu gross, und wir dürfen dann annehmen, dass dieser Druckunterschied nicht durch eine hydrodynamische Strömung von  $P$  nach  $Q$  durch die Öffnungen  $bb^1$  und  $dd^1$  beeinflusst, bzw. teilweise ausgeglichen wird; aufgrund der thermischen Gleitung entlang der Wände  $ab$  und  $de$  werden bei dieser Aufstellung, unabhängig von einander, Gasströmungen in  $P$  und  $Q$  entstehen, wie dies in der Zeichnung angedeutet ist. Ist  $a_2 > a_1$ , wird die Strömungsgeschwindigkeit in der Hälfte  $P$  laut der Theorie der thermischen Gleitung etwas grösser sein als in dem Raum  $Q$ .

Wir betrachten erst die Wärmeabgabe per  $\text{cm}^2$ , Sek.

<sup>17)</sup> MARTIN KNUDSEN: loc. cit. (4), S. 33.

und per Grad Temperaturdifferenz unter der Voraussetzung, dass  $\frac{T_1 - T_2}{T}$  eine kleine Grösse ist; wir nennen die Wärmeabgabe per  $\text{cm}^2$ , Sek. Grad von der Seite mit dem Akkommodationskoeffizienten  $a_2$ ,  ${}_2q_p$  und von der anderen Seite  ${}_1q_p$ ; diese sind bestimmt durch:

$${}_2q_p(T_1 - T_2)B = a_2 \cdot \varepsilon_{t_2} \cdot p(T_1 - t_2)B$$

und

$${}_1q_p(T_1 - T_2)B = a_1 \cdot \varepsilon_{t_1} \cdot p(T_1 - t_1)B,$$

worin  $t_2$  und  $t_1$  die Temperaturen des Gases im mittleren Abstand  $\frac{1}{2}k\lambda$  von dem Band bezeichnen.

Laut der Untersuchung von MARTIN KNUDSEN sind die Werte von  $a_2$  und  $a_1$  dieselben für die Wärmeleitung und die Radiometerkraft; hieraus erhalten wir für die KNUDSEN'sche Radiometerkraft per cm Länge:

$$R = {}_2R_p - {}_1R_p = \frac{1}{4}a_2 \cdot \frac{p}{t_2}(T_1 - t_2)B - \frac{1}{4}a_1 \cdot \frac{p}{t_1}(T_1 - t_1)B$$

oder

$$R_1 = \frac{R}{B(T_1 - T_2)} = \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \frac{1}{T} ({}_2q_p - {}_1q_p), \quad (24)$$

weil wir in erster Annäherung, wenn  $\frac{T_1 - T_2}{T}$  eine kleine Grösse gegenüber 1 ist, setzen können:

$$t_1 = t_2 = \frac{T_1 + T_2}{2} = T$$

und

$$\varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2} = \varepsilon_T = \varepsilon.$$

Für  ${}_2q_p - {}_1q_p$  haben wir aber den folgenden Ausdruck abgeleitet:

$${}_2q_p - {}_1q_p = (a_2 - a_1) \frac{\varepsilon p}{1 + (a_2 + a_1) \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p + a_1 a_2 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 p^2},$$

sodass wir erhalten:

$$\frac{R}{T_1 - T_2} = \frac{1}{4} (a_2 - a_1) \frac{B}{T} \cdot \frac{p}{1 + (a_2 + a_1) \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right) p + a_1 a_2 \left(\frac{\varepsilon}{q_\alpha}\right)^2 p^2}. \quad (25)$$

Hieraus erhalten wir auf die bekannte Weise:

$$\left(\frac{R}{T_1 - T_2}\right)_{\max} = \frac{1}{4 T} \cdot \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2} \cdot \frac{q_\alpha}{\varepsilon} \cdot B \quad (26)$$

und

$$p_{\max} = \frac{q_\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \quad (27)$$

mit

$$q_\alpha = \frac{\pi K}{B} \cdot \frac{1}{r_0 + \frac{1}{2} k \lambda} \cdot \frac{1}{\ln \frac{B}{\pi} + \frac{1}{2} k \lambda} \quad (28)$$

Wir sehen hieraus, dass in erster Annäherung  $p_{\max} \propto \frac{1}{B}$ , und dass  $\left(\frac{R}{T_1 - T_2}\right)_{\max}$  unabhängig von der Breite  $B$  des Bandes ist.

Ausserdem erhalten wir die folgende Formel:

$$\left(\frac{R}{T_1 - T_2}\right)_{\max} : p_{\max} = \frac{1}{4 T} \cdot \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2} \sqrt{a_1 a_2} \cdot B. \quad (29)$$

RASMUSSEN hat für seine Aufstellung, die prinzipiell dieselbe, wie die in Fig. 6 skizzierte, ist, nicht nur die Wärmeabgabe und die Radiometerkraft im molekularen Zustande, sondern auch diese Grössen bei höheren Drucken gemessen; bei diesen Messungen hat er die Temperaturdifferenzen  $T_1 - T_2 = 40^\circ \text{C}$ ,  $80^\circ \text{C}$  und  $120^\circ \text{C}$  verwendet, während  $T_2 = 273,1 + 20^\circ$  war. Die Messresultate sind in Tabelle VI wiedergegeben; in Kolonne 6 ist der Mittelwert,  $\frac{\bar{R}}{T_1 - T_2}$ , gegeben. Wenn die Genauigkeit der Messungen in Betracht

gezogen wird, kann dieser Wert am besten für  $T_1 - T_2 = 80^\circ \text{C}$  angenommen werden.

Die Wärmeabgabe  $\bar{q} = \frac{1}{2}({}_2q + {}_1q)$  in Kolonne 7 ist auch der Mittelwert der gemessenen Wärmeabgaben bei  $T_1 - T_2 = 40^\circ \text{C}$ ,  $80^\circ \text{C}$  und  $120^\circ \text{C}$ , und entspricht also der Temperaturdifferenz  $T_1 - T_2 = 80^\circ \text{C} = \overline{AT}$ .

Tabelle VI.

Wasserstoff:

$$T_1 - T_2 = \overline{AT} = 80^\circ, \quad T_2 = 293^\circ,1, \quad \frac{T_1 + T_2}{2} = T = 333^\circ,1$$

$$\bar{q} = \frac{1}{2}({}_2q + {}_1q)$$

| $p$ (Bar) | $\log_{10} p$ | $10^4 \cdot \frac{R}{AT}$ | $10^4 \cdot \frac{R}{AT}$ | $10^4 \cdot \frac{R}{AT}$ | $10^4 \cdot \frac{\bar{R}}{AT}$ | $\bar{q} = \frac{W \cdot i^2}{AT} \cdot 10^4$ |
|-----------|---------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------------|-----------------------------------------------|
|           |               | $AT = 40^\circ$           | $AT = 80^\circ$           | $AT = 120^\circ$          | $\overline{AT} = 80^\circ$      | $\overline{AT} = 80^\circ$                    |
| 50,0      | 1,699         | 99                        | 87                        | 86                        | 91                              | 192                                           |
| 97,4      | 1,989         | 144                       | 119                       | 123                       | 129                             | 316                                           |
| 142,4     | 2,154         | 151                       | 134                       | 135                       | 140                             | 418                                           |
| 301,0     | 2,479         | 132                       | 122                       | 125                       | 126                             | 619                                           |
| 452       | 2,655         | 109                       | 96                        | 111                       | 105                             | 749                                           |
| 596       | 2,775         | 90                        | 89                        | 95                        | 91                              | 839                                           |
| 3460      | 3,539         | 36                        | 26                        | 30                        | 31                              | 1261                                          |
| 1950      | 3,290         | 56                        | 40                        | 43                        | 46                              | 1164                                          |
| 964       | 2,984         | 73                        | 58                        | 63                        | 65                              | 1026                                          |
| 715       | 2,854         | 82                        | 66                        | 79                        | 76                              | 935                                           |
| 531       | —             | —                         | —                         | —                         | —                               | 843                                           |
| 394       | —             | —                         | —                         | —                         | —                               | 744                                           |
| 38,2      | 1,582         | 80                        | 75                        | 71                        | 75                              | 156                                           |
| 73,9      | 1,869         | 111                       | 113                       | 107                       | 110                             | 264                                           |
| 107,7     | 2,032         | 131                       | 130                       | 123                       | 128                             | 350                                           |
| 139,7     | 2,145         | 135                       | 136                       | 131                       | 134                             | 418                                           |
| 199,0     | 2,299         | 167                       | 154                       | 140                       | 154                             | 518                                           |
| 64,6      | 1,810         | 119                       | 114                       | 99                        | 111                             | 240                                           |
| 125,9     | 2,100         | 156                       | 141                       | 128                       | 142                             | 390                                           |
| 183,8     | 2,264         | 153                       | 142                       | 131                       | 142                             | 490                                           |
| 347       | 2,540         | 133                       | 122                       | 117                       | 124                             | 690                                           |
| 499       | 2,698         | 95                        | 100                       | 100                       | 98                              | 814                                           |
| 814       | 2,911         | 80                        | 68                        | 78                        | 75                              | —                                             |

Fig. 7 ist eine graphische Darstellung von  $\frac{\bar{R}}{T_1 - T_2} \cdot 10^4$  in seiner Abhängigkeit von  $\log_{10} p$ ; hieraus geht hervor, dass man eine symmetrische Kurve erhält, was auch nach der Formel (25) zu erwarten war. Wir finden hieraus:

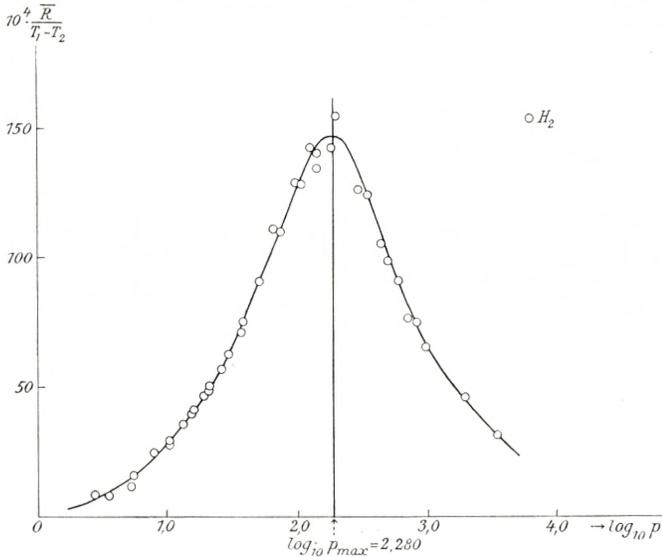


Fig. 7.

$$R'_{\max, \text{ obs.}} = \left( \frac{\bar{R}}{T_1 - T_2} \right)_{\max, \text{ obs.}} = 145 \cdot 10^{-4} \text{ Dyn/cm, Grad}$$

und  $\log_{10} p_{\max} = 2,280$

oder

$$p_{\max} = 190 \text{ Bar.}$$

Wir erhalten also:

$$R'_{\max, \text{ obs.}} / p_{\max, \text{ obs.}} = 0,763 \cdot 10^{-4}.$$

Theoretisch finden wir für diese Grösse:

$$R'_{\max, \text{ ber.}} / p_{\max, \text{ ber.}} = \frac{1}{4 T} \cdot \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2} \sqrt{a_1 a_2} \cdot B = 0,758 \cdot 10^{-4}$$

mit  $a_2 = 0,735$ ,  $a_1 = 0,315$  und  $T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 333^\circ,1$ .

Durch die Messungen der Wärmeabgabe ist es auch möglich,

für das Messsystem den Wert von  $\frac{q_\alpha}{\varepsilon}$  bei  $p_{\max} = 190$  Bar zu erhalten. Eine graphische Darstellung von  $\bar{q} = \frac{W \cdot t^2}{AT} \cdot 10^4$  in seiner Abhängigkeit von  $p$  ergibt eine glatte Kurve (Fig. 8),

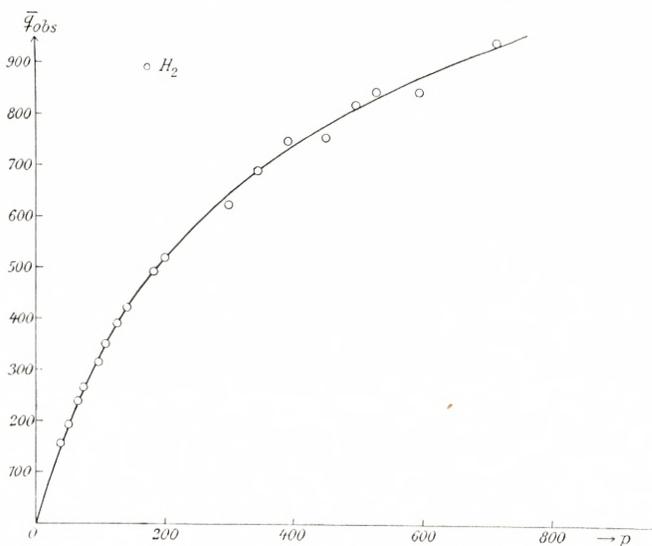


Fig. 8.

die für  $p = 190$  Bar gibt:  $q_p = 0,0510 \cdot \frac{10^7}{29,66} = 17200$ ;  
hieraus findet man mit Hilfe der Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha},$$

$$q_\alpha = 36740,$$

da

$$q_0 = \frac{1}{2} (a'_1 + a'_2) \varepsilon_T \cdot p = 32340,$$

weil

$$\varepsilon_T = 414,1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} (a'_2 + a'_1)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{a_2}{1 + a_2 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} + \frac{a_1}{1 + a_1 \frac{1 - a_0}{a_0} \cdot \frac{B}{\pi r_0}} \right\} = 0,411.$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{q_\alpha}{\varepsilon_T} = \frac{36740}{414,1} = 89,0.$$

Verwendet man diesen Wert für  $\frac{q_\alpha}{\varepsilon}$  zur Berechnung von  $R'_{\max}$  und  $p_{\max}$ , bekommt man:

$$R'_{\max, \text{ber.}} = \frac{1}{4 T} \cdot \frac{a_2 - a_1}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2} \cdot \frac{q_\alpha}{\varepsilon} \cdot B = 140 \cdot 10^{-4} \begin{cases} \text{Dyn/cm,} \\ \text{Grad} \end{cases}$$

und

$$p_{\max, \text{ber.}} = \frac{q_\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} = 185 \text{ Bar.}$$

Wir ersehen hieraus, dass die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten für  $R'_{\max}$  und  $p_{\max}$  befriedigend ist.

10. Man könnte sich vielleicht fragen, inwiefern es erlaubt ist, die Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha} \quad \text{mit} \quad q_\alpha = \frac{\pi K}{B} \cdot \frac{1}{\ln \frac{2(l+m) + \pi k \lambda}{2B + \pi k \lambda}}$$

für die Aufstellung von RASMUSSEN anzuwenden; wir wollen dies an einigen der Messungen bei höherem Druck nachprüfen. RASMUSSEN fand bei dem Druck  $p = 3460$  Bar die totale Wärmeabgabe per Grad Temperaturdifferenz des Bandes zu:

$$\frac{W \cdot i^2}{T_1 - T_2} = 0,1261,$$

woraus:

$$q_{p, \text{obs.}} = \frac{0,1261}{29,66} \cdot 10^7 = 42480 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad.}$$

Wir finden für  $p = 3460$  Bar  $q_0 = \frac{1}{2}(a'_2 + a'_1) \varepsilon_T p = 0,411 \cdot 414,1 \cdot 3460 = 589300$  und

$$q_\alpha = \frac{2\pi K_{60}}{2B \ln \frac{9,36 + \pi k \lambda}{2,00 + \pi k \lambda}} = 41315 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad,}$$

weil  $\pi k \lambda = 0,05$  und  $K_{60} = 4783 \cdot 10^{-7} \cdot 4,19 \cdot 10^7$ .

Mit diesen Werten wird aus der Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha},$$

gewonnen:

$$q_{p, \text{ber.}} = 38577 \text{ Erg/cm}^2, \text{ Sek., Grad.}$$

Wir ersehen hieraus, dass bei dem Druck  $p = 3460$  Bar der beobachtete Wert von  $q_p$  etwa 10 % grösser ist als der berechnete; ob diese Abweichung ihre Ursache in dem Strömungszustand bei höherem Druck oder in einem Formfaktor hat, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden; wahrscheinlich sind beide Ursachen von Bedeutung. Für die Messung bei dem Druck  $p = 1950$  Bar finden wir in derselben Weise, dass  $q_{p, \text{ber.}}$  etwa 6 % kleiner ist als der beobachtete Wert. Es erhellt jedenfalls hieraus, dass man für den RASMUSSEN'schen Apparat annäherungsweise die Formel:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha},$$

verwenden darf.

Wir sehen aus dem obenstehenden, dass die rein molekulartheoretische Behandlung der KNUDSEN'schen Radiometerkraft bei höheren Drucken — wenn der Apparat so eingerichtet ist, dass die entstehenden Strömungen nicht den molekularkinetischen Druckunterschied beeinflussen können — die richtige Beschreibung der Experimente und

des Entstehens der Radiometerkraft geben kann<sup>18)</sup>. Ganz anders werden aber die Verhältnisse, wenn die entstehenden Strömungen sich frei entwickeln und dadurch den sich bildenden Druckunterschied teilweise ausgleichen können, z. B. wenn dasselbe Band  $B$  in einem sehr grossen Behälter aufgestellt wird, so dass das Gas frei um das Band strömen kann; in diesem Falle wird der Strömungszustand so wie von MARTIN KNUDSEN angegeben<sup>19)</sup>, und das Radiometerproblem wird in erster Linie, jedenfalls solange die Strömungen laminar bleiben, ein rein hydrodynamisches Problem. Nachdem das hydrodynamische Problem gelöst ist, kann im allgemeinen auch das Radiometerproblem gelöst werden.

Wenn das Band in einem unbegrenzten Raum frei aufgestellt ist, wird die maximale Radiometerkraft  $R'_{\max}$  viel kleiner; dasselbe gilt auch für den Wert von  $p_{\max}$ . Mit einem praktisch gesprochen identischen Band:  $a_1 = 0,315$ ,  $a_2 = 0,715$ ,  $B = 1,001$  cm, in einem sehr grossen Behälter fand R. E. H. RASMUSSEN<sup>20)</sup>:

$$R'_{\max} = \left( \frac{R}{T_1 - T_2} \right)_{\max} = 30,4 \cdot 10^{-4} \text{ Dyn/cm, Grad}$$

und  $p_{\max} = 33 \text{ Bar}$ ,

also ungefähr nur ein Fünftel der oben erwähnten experimentellen Werte in dem engen Rohr.

In einer folgenden Abhandlung soll die ziemlich komplizierte Theorie für diesen Fall näher beleuchtet und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen werden.

<sup>18)</sup> vgl. EARLE H. KENNARD: Kinetic Theory of Gases 1938, S. 334.

<sup>19)</sup> MARTIN KNUDSEN: loc. cit. (4) Fig. 5, S. 58.

<sup>20)</sup> R. E. H. RASMUSSEN: loc. cit. (14), S. 13.

### Zusammenfassung.

Ausgehend von der theoretischen Formel  $K = \frac{5}{2} c_v \cdot \eta$  für die Wärmeleitfähigkeit der einatomigen Gase habe ich früher nachgewiesen, dass in einem Gase, in dem ein Temperaturgradient herrscht, die Moleküle, welche von dem mittleren Abstände  $\lambda$  kommen, die mittlere kinetische Energie besitzen, die der Temperatur im mittleren Abstand  $\frac{1}{2} k \lambda$  entspricht; für einatomige Gase ist  $k = \frac{15}{4}$ ; für mehratomige Gase wird  $k = \frac{9\gamma - 5}{\gamma + 1}$ , worin  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ .

Für coaxiale Zylinder mit den Radien  $r_1$  und  $r_0$  wird hierdurch eine Formel für den Wärmetransport  $q_p$  zwischen diesen abgeleitet. Diese Formel kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{1}{q_p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_\alpha},$$

worin:

$$q_\alpha = \frac{2\pi K(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_0 + \frac{1}{2}k\lambda}{r_1 + \frac{1}{2}k\lambda}} \quad \text{und} \quad q_0 = 2\pi r_1 \varepsilon p \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \cdot \frac{r_1}{r_0}}.$$

Für  $\frac{r_0}{\lambda}$  bzw.  $\frac{r_1}{\lambda} \rightarrow \infty$  geht diese Formel in die bekannte SCHLEIERMACHER'sche Formel mit einer Korrektur für den Temperatursprung über; für  $\frac{r_0}{\lambda}$  bzw.  $\frac{r_1}{\lambda} \Rightarrow 0$  gibt diese Formel den richtigen Grenzwert  $q_0$  für die rein molekulare Wärmeleitung.

Die Formel wird mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial für die Wärmeleitfähigkeit des reinen Neons und mit dem Beobachtungsmaterial für das Hitzdrahtmanometer von MARTIN KNUDSEN verglichen wie auch mit den ex-

perimentellen Resultaten von MARTIN KNUDSEN über den Einfluss des Akkommodationskoeffizienten auf die Wärmeleitung von Helium und Wasserstoff; die Übereinstimmung kann als befriedigend angesehen werden.

Zum Schluss wird der theoretische Zusammenhang zwischen dem Wärmetransport  $q_p$  und der KNUDSEN'schen Radiometerkraft  $R$  in einem besonderen, von R. E. H. RASMUSSEN experimentell untersuchten Fall geklärt. Ist  $\frac{T_1 - T_2}{T} \ll 1$ , stimmt die abgeleitete Formel:

$$\begin{aligned} \frac{R}{T_1 - T_2} &= \frac{1}{4 \cdot \varepsilon} \cdot \frac{B}{T} \{ {}_2q_p - {}_1q_p \} = \\ &= \frac{1}{4} (a_2 - a_1) \frac{B}{T} \frac{p}{1 + (a_2 + a_1) \left( \frac{\varepsilon}{q_\alpha} \right) p + a_1 a_2 \left( \frac{\varepsilon}{q_\alpha} \right)^2 \cdot p^2} \end{aligned}$$

mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial befriedigend überein.

Auch bei dieser Gelegenheit möchte ich der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds meinen aufrichtigen Dank für die mir gewährte Unterstützung aussprechen.

